ลำดับการปรากฏและสมบัติการหารลงตัวของลำดับฟีโบนักซี

ประพันธ์พงศ์ พงศ์ศรีเอี่ยม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ที่มาและความสำคัญ

ลำดับฟีโบนักซี $(F_n)_{n\geq 1}$ นิยามโดย $F_1 = F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ ดังนั้นจำนวนตัวแรกๆ ของลำดับฟีโบนักซีคือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... อันดับการปรากฏของ m (the order of appearance of m) ในลำดับฟีโบนักซี เขียนแทนด้วย $z(m)$ คือจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ m หาร F_k ลงตัว เรื่องสมบัติการหารลงตัวของจำนวนฟีโบนักซี และพฤติกรรมของอันดับการปรากฏ เป็นหัวข้อวิจัยที่เป็นที่นิยมและมีการศึกษากันอย่างมาก แต่ก็ยังมีปัญหาหลายข้อที่ยังไม่ได้รับการพิสูจน์ ข้าพเจ้าพัฒนาเทคนิคที่มีอยู่เดิมให้ดีขึ้นและนำไปใช้ในการพิสูจน์ผลลัพธ์เกี่ยวกับ การหารลงตัวแบบแม่นตรงโดยกำลังของจำนวนฟีโบนักซี [3] ตัวอย่างเช่น ข้าพเจ้าพิสูจน์ได้ว่า [3, Theorem 2]

Theorem Let k, m, n be positive integers and $n \geq 3$. Then

(i) if $F_n^k \parallel m$ and $n \not\equiv 3 \pmod 6$, then $F_n^{k+1} \parallel F_{nm}$,

(ii) if $F_n^k \parallel m$ and $n \equiv 3 \pmod 6$, and $(F_n^{k+1}/2) \nmid m$, then $F_n^{k+1} \parallel F_{nm}$,

(iii) if $F_n^k \parallel m$ and $n \equiv 3 \pmod 6$, and $(F_n^{k+1}/2) \mid m$, then $F_n^{k+2} \parallel F_{nm}$.

ผลการวิจัย

จากนั้นข้าพเจ้า และนางสาวนริศรา เค้าฉิม (นักศึกษามหาวิทยาลัยศิลปากร) ได้ทำการศึกษาผลงานของ Diego Marques เรื่องอันดับการปรากฏ โดยเฉพาะเรื่องสูตรของอันดับการปรากฏของผลคูณของจำนวนฟีโบนักซีที่อยู่ติดกันโดย Diego Marques [2] ได้รับสูตรของ $z(F_nF_{n+1})$ $z(F_nF_{n+1}F_{n+2})$ และ $z(F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3})$ และได้ขยายสูตรดังกล่าวไปยังผลคูณของจำนวนฟีโบนักซีที่ติดกันยาวขึ้น ซึ่งก็คือ $z(F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4})$ $z(F_nF_{n+1}\cdots F_{n+5})$ และ $z(F_nF_{n+1}\cdots F_{n+6})$ [1] ตัวอย่างเช่น เราพิสูจน์ได้ว่า

Theorem Let $n \geq 1$, $a = [n, n+1, \ldots, n+5]$, $b = [F_nF_{n+1}\cdots F_{n+6}]$, and $c = (5,n(n+1))$. Then

$$z(b)=\begin{cases} ac, & \text{if } n\equiv 1,2,3,4,5,6 \pmod{12};\\ 2ac, & \text{if } n\equiv 9,10 \pmod{12};\\ \dfrac{72(5,n)a}{(8,n+|r-8|)(9,n+|r-9|)}, & \text{if } n\equiv r \pmod{12} \text{ and } r\in\{7,8,12\};\\ \dfrac{72(5,n)a}{(8,n+5)(9,n+4)}, & \text{if } n\equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] N. Khaochim and P. Pongsriiam, On the order of appearance of product of consecutive Fibonacci numbers, submitted

[2] D. Marques, The order of appearance of product of consecutive Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 50(2) (2012), 132-139.

[3] P. Pongsriiam, Exact Divisibility by Powers of the Fibonacci and Lucas Numbers, Journal of Integer Sequences, 17(11) (2014), Article 14.11.2